Tentamen Groepentheorie, dinsdag 26 januari 2010, 14.00–17.00.

De opgaven tellen alle vijf even zwaar. *Veel Succes!*

(1) (a) Gegeven is een natuurlijk getal $n \geq 2$. Laat zien dat $(1+n) \bmod n^2$ een element is van $(\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z})^*$.
(b) Bewijs vervolgens (bijv. met volledige inductie) dat voor $k \in \mathbb{N}$ geldt $(1+n)^k \equiv 1 + kn \bmod n^2$, en bepaal de orde van $\overline{1+n}$ in de groep $(\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z})^*$.
(c) Bevat $(\mathbb{Z}/100\mathbb{Z})^*$ een element met orde 40? Bewijs je antwoord.

(2) Bepaal de orde van $\tau = (5\ 6\ 7\ 8\ 9)(3\ 4\ 5\ 6)(2\ 3\ 4)(1\ 2)$ in de groep S_9. Is τ een even of een oneven permutatie? Hoeveel elementen bevat de conjugatieklasse van τ?

(3) Toon aan dat $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 5b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ en } a^2 - 5b^2 \neq 0 \right\}$ een commutatieve groep is, en dat $H = \{A \in G \mid \det(A) > 0\}$ een ondergroep is met index $[G : H] = 2$.

(4) In de groep bestaande uit alle bijecties van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ nemen we de ondergroep G, voortgebracht door de drie bijecties t, p en s. Hier is t de translatie gegeven door $t(x,y) = (x+1, y)$ en p is de puntspiegeling $p(x,y) = (-x,-y)$ en s is de gewone spiegeling $s(x,y) = (-x,y)$. Laat zien dat $H := \{t^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ een normaaldeler is in G.

(5) We vatten de ruimte $\mathbb{R}^n$ op als een groep met $(0,\ldots,0)$ als eenheidselement en coördinaatsgewijze optelling als groepswet. Bewijs dat de 'lijn' $L = \{(a, 0, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ een normaaldeler is in $\mathbb{R}^3$, en dat $\mathbb{R}^3/L \cong \mathbb{R}^2$. (Hint: bedenk een homomorfisme van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^2$ dat surjectief is en dat precies L als kern heeft)

1	2	3	4	5	9
4	6	5	5	5	=25

Tentamen Groepentheorie

26 - 1 - 2010 dubbelvel 1/6

> NB! Opgaven staan NIET in normale volgorde en beginnen NIET telkens op een nieuw blad!

6 Opgave 2

Gegeven: $\tau = (5\,6\,7\,8\,9)(3\,4\,5\,6)(2\,3\,4)(1\,2)$

schrijf τ als vereniging van disjuncte cykels om de orde van τ te berekenen:

$\tau = (1\,4\,2)(3\,6)(5\,7\,8\,9)$

Dan zegt een stelling dat omdat een k-cykel orde k heeft dat

$\text{ord}(\tau) = \text{kgv}(2, 3, 4) = 12$

Schrijf nu τ als product van 2-cykels om $\varepsilon(\tau)$ te berekenen:

$\tau = (1\,4\,2)(3\,6)(5\,7\,8\,9) =$

$(1\,4)(4\,2)(3\,6)(5\,7)(7\,8)(8\,9)$

Dan is: $\varepsilon(\tau) = (-1)^6 = 1$

Dus τ is een even permutatie.

Nu gaan we $\# C_\tau$ in S_9 bepalen; gegeven is dat $\tau \in S_9$.

Neem een willekeurige $\sigma \in S_9$. Dan is

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma(1\,4\,2)\sigma^{-1}\sigma(3\,6)\sigma^{-1}\sigma(5\,7\,8\,9)\sigma^{-1} =$$

$$(\sigma(1)\ \sigma(4)\ \sigma(2))(\sigma(3)\ \sigma(6))(\sigma(5)\ \sigma(7)\ \sigma(8)\ \sigma(9))$$

omdat $\sigma \in S_9$ willekeurig is, kan conjugatie van τ met σ elke willekeurige permutatie die bestaat uit een 2-cykel, een 3-cykel en een 4-cykel, allemaal disjunct opleveren.
Al deze permutaties zitten in C_τ;

$$C_\tau = \{\sigma\tau\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_9\}.$$

Dus als we dit aantal permutaties kunnen bepalen, weten we $\#C_\tau$.

Eenvoudige combinatoriek geeft dan dat er —

$\cancel{\#C_\tau = \binom{9}{4}\binom{5}{3}}$

$\cancel{\binom{9}{4}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 1260}$ ~~manieren zijn om 9 getallen zo te kiezen dat ze een 4-cykel, een 3-cykel en een 2-cykel, disjunct, vormen. Echter, omdat elke k-cykel k equivalente [illegible] dat.~~

$\cancel{\#C_\tau = \frac{1260}{4 \cdot 3 \cdot 2}}$

$\binom{9}{4}\cdot\frac{4!}{4} = 756$ ~~[illegible]~~ verschillende 4-cykels in S_9 bestaan.

(Er zijn $\binom{9}{4}$ mogelijkheden om ~~[illegible]~~ de 4-getallen te kiezen uit 9, dan kun je die op 4! manieren achter elkaar zetten, maar een k-cykel heeft k-equivalente schrijfwijzes, dit geeft het antwoord.

Nu zijn er nog 5 getallen over om een tweede disjuncte 3-cykel te kiezen; een analoge berekening zegt dat er dan nog

$\binom{5}{3}\cdot\frac{3!}{3} = 20$ manieren zijn om deze 3-cykel te kiezen.

Er zijn dan nog 2 getallen over voor een 2-cykel, maar met ~~[illegible]~~ 2 getallen kun je maar op een manier een 2-cykel vormen; dus:

$\# C_\tau = 756 \cdot 20 \cdot 1 = 15120$

Opgave 3

G is een verzameling; de groepswet is matrix-vermenigvuldiging en $I_{2\times 2}$ is het eenheidselement.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{Q} \text{ en } a^2-5b^2 \neq 0 \right\}.$$

a: G een groep is, moet $I_{2\times 2} \in G$ zijn en G moet gesloten zijn onder de groepswet. verder moeten er nog een 3-tal axioma's gelden.

$I \in G$, want:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}$$ met $a=1, b=0$ dus $I \in G$.

~~G~~ G gesloten onder groepswet:

Kies $A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} c & 5d \\ d & c \end{pmatrix}$

met $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ willekeurig en z.d.d. $a^2 - 5b^2 \neq 0$ en $c^2 - 5d^2 \neq 0$

Dan is $AB = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 5d \\ d & c \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} ac + 5bd & 5ad + 5bc \\ bc + ad & 5bd + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 5y \\ y & x \end{pmatrix}$$

met $x = ac + 5bd$ en $y = bc + ad$
verder zijn $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ is gesloten onder vermenigvuldigen en optellen, dus $x, y \in \mathbb{Q}$.

en ten slotte is $x^2 - 5y^2 \neq 0$

~~$((ac + 5bd))^2 - 5(bc + ad)^2 =$~~ want.
~~$a^2c^2 + 10abcd$~~. zie volgende bladzijde

tent Groepentheorie 26/1/2010

dubbelvel 2/6

<u>vervolg opgave 3.</u>

$x^2 - 5y^2 = \det(AB)$

gegeven is: $a^2 - 5b^2 = \det(A) \neq 0$ en
$c^2 - 5d^2 = \det(B) \neq 0$ en

volgens de lineaire algebra geldt dat

$\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$, omdat
$\det(A)$, $\det(B)$
beide niet nul zijn.

dit bewijst dat als $A, B \in G$, dan $AB \in G$.

Dus G is gesloten onder zijn groepsnet.

Nu de axioma's:

G1, associativiteit. kies $A, B, C \in G$, dan is
$(AB)C = A(BC)$ want matrixvermenigvuldiging is associatief.

G2: kies $A \in G$ willekeurig, dan is
$AI = IA = A$, want dit geldt $\forall A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$;
stelling uit de lineaire algebra. beperken we A tot G, geldt dit uiteraard nog steeds.

G3: inverse:

kies $A \in G$ willekeurig: dan geldt $\det(A) \neq 0$ en volgens de lineaire algebra geldt:

$\det(A) \neq 0$

$\iff$

A niet-singulier

$\iff$

$\exists\, B$ z.d.d. $AB = BA = I$

onze enige zorg is nu dat $B \in G$.

De lineaire algebra zegt nu dat zo'n matrix B moet voldoen aan:

$$B = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) =$$

$$\frac{1}{a^2 - 5b^2}\begin{pmatrix} a & -5b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 5y \\ y & x \end{pmatrix}$$

met $x = \dfrac{a}{a^2-5b^2}$; $y = \dfrac{-b}{a^2-5b^2}$

en $a, b \in \mathbb{Q}$; $a^2 - 5b^2 \neq 0$, dus $x, y \in \mathbb{Q}$.

en $\det(B) = \dfrac{1}{(a^2-5b^2)^2} \cdot (a^2 - (-5b) \cdot -b) = \dfrac{1}{a^2-5b^2} \neq 0$; $a^2 - 5b^2 \neq 0$

hieruit volgt $B \in G$.

Aan alle voorwaarden van een groep is nu voldaan, dus het drietal $(G, \cdot, I)$ is een g

□

Nu moeten we nog bewijzen dat de groep G abels is.

We willen bewijzen dat $AB = BA \ \forall A, B \in G$.

Kies $A, B \in G$ willekeurig:

$$A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} c & 5d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ en $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$.

Dan is

$$AB = \begin{pmatrix} ac + 5bd & 5(ad + bc) \\ ad + bc & ac + 5bd \end{pmatrix}$$ eerder berekend.

en

$$BA = \begin{pmatrix} c & 5d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ca + 5db & 5bc + 5ad \\ da + cb & 5bb + ac \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ac + 5bd & 5(ad + bc) \\ ad + bc & ac + 5bd \end{pmatrix} = AB$$

dus G is abels. $\square$.